

Олимпиада по математике МГТУ им. Н.Э. Баумана (2001/2002 учебный год, 1 курс).

1. Вычислить предел функции в точке:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^{\cos x} - 1}{\cos x - 1}$$

2. Найти сумму $a + b$, если $a, b \in \mathbb{R}$ и

$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1, b^3 - 3b^2 + 5b = 5$$

3. Найти максимальное и минимальное значение величины

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix},$$

если a, b, c - координаты единичного вектора.

4. а) Как должны быть расположены точки А, В, С, D на плоскости, чтобы можно было построить такой четырехугольник MNPК, чтобы точки А, В, С и D были серединами его сторон? (Определить необходимое и достаточное условие).
б) Пусть точки А, В, С, D расположены так, что можно построить MNPК. В каких случаях такое построение единственно, а в каких нет? Если построение не единственно, то сколько таких четырехугольников можно построить?
5. В трехмерном пространстве указать все пары векторов \bar{a} и \bar{b} , такие, что система относительно вектора \bar{x}

$$\begin{cases} (\bar{a}, \bar{x}) = |\bar{b}| \\ [\bar{a}, \bar{x}] = \bar{b} \end{cases}$$

имеет решение.